

PEMODELAN MATEMATIKA DAN SIMULASI NUMERIK LEMPAR LEMBING

Rani Rotul Muhima¹⁾, Maftahatul Hakimah²⁾

^{1,2}Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi,
Institut Teknologi Adhitama Surabaya

Email:¹rrmuhima85@gmail.com, ²hakimah_mafta@yahoo.co.id

ABSTRAK

Lempar lembing merupakan salah satu cabang olahraga atletik. Hasil lemparan dalam lempar lembing tergantung beberapa faktor, antara lain kekuatan, kecepatan, persiapan fisik dan psikologis pelempar. Teknik melakukan lemparan, kondisi cuaca saat melakukan lemparan, jenis lembing yang digunakan, kondisi lapangan juga berpengaruh pada hasil lemparan. Pengembangan model matematikagerak lembing setelah dilempar pada makalah ini bertujuan untuk mengoptimalkan hasil lemparan pelempar lembing. Pengoptimalan hasil lemparan dititikberatkan pada pemilihan kecepatan awal lemparan dan sudut arah lemparan. Model matematika dikembangkan dalam bentukdua dimensi. Tiga parameter yang dikaji dalam model matematika gerak lembing, yaitu: geometri, massa dan gaya aerodinamika. Persamaan *Nonlinear Three Degrees of Freedom (3 DOF)* digunakan untuk model matematika gerak lembing. Karakteristik aerodinamika lembing dianalisa menggunakan metode analitik, empiris dan hasil-hasil eksperimen. Karakteristik tersebutdihitung dengan memasukkan geometri umum lembing. Geometri lembing yang digunakan pada makalah ini adalah geometri lembing wanita. Simulasi numerik dari model matematika dilakukan dengan variasi kecepatan awal lemparan dan arah lemparan. Hasil simulasi numerik gerak lempar lembing disajikan dalam bentuk grafik dan diperoleh tinggi maksimum H sebesar 28,62 m dan jangkauan maksimum x sebesar 157,476 m pada kecepatan awal $V_0=40$ m/s dan sudut lemparan $\theta_0=35$ deg.

Kata Kunci: gerak lembing, model matematika, aerodinamika, simulasi numerik, 2D.

ABSTRACT

Javelin throw is one of the sport of athletics. Results in the javelinthrow depends on several factors, such as strength, speed, physical preparation, and psychological thrower. Technical thrower, the weather conditions when making the throw, javelin used species, field conditions also affect the results of the throw. Development of mathematical models of motion javelin after being thrown on the paper aims to optimize the results throw javelin thrower. . Optimization of the results focused on the selection of the initial speed of the throw and angle of direction of the throw. The mathematical model of javelin motion developed in 2D. Three parameter were studied in the mathematical model of javelin throw: geometry, mass, and aerodynamic forces. NonlinearThree Degrees of Freedom(3DOF) equations of motion used in the mathematical model of javelin motion. Javelin aerodynamic characteristics were analyzed using the analytical method, emperical and results of the experimental. The characteristic was calculated by including the general geometry of the javelin. Geometri of javelin that used in this paper was the geometry of female javelin. The model was simulated for different initial velocities and throwing angles. The simulation results are presented in graphical form and maximum height $H = 28,62$ m and maximum rangevalue $R = 157,476$ m was obtained at the initial velocity $V_0 = 40$ m/s and the pitch angle $\theta_0=35$ deg.

Keywords: javelin throw, mathematical model, aerodynamics, numerical simulation, 2D.

PENDAHULUAN

Lempar lembing merupakan salah satu dari nomor lempar yang terdapat pada cabang olahraga atletik [1]. Alat yang digunakan dalam olah raga ini berbentuk panjang dan bulat dengan berat tertentu yang terbuat dari kayu, bambu atau metal dan disebut lembing.

Hasil lemparan dalam lempar lembing tergantung beberapa faktor, antara lain kekuatan, kecepatan, persiapan fisik, dan psikologis pelempar. Teknik melakukan lemparan, kondisi cuaca saat melakukan lemparan, jenis lembing yang digunakan, kondisi lapangan juga mempengaruhi hasil lemparan[2].

Penelitian tentang lempar lembing yang mengkaji pengembangan teknologi lempar telah banyak dilakukan. Penelitian [1] menganalisis gerak lempar lembing yang benar dengan sudut elevasi yang tepat dari segi biomekanika dan kinesiologi. Penelitian [3] memberikan model gerak lembing untuk mengoptimalkan hasil lemparan. Penelitian [4] mengkaji karakteristik aerodinamika tiga jenis lembing dan menentukan sudut lempar yang optimal pada masing masing jenis lembing. Penelitian [2] memodelkan gerak lembing setelah dilempar bersama vibrasi elastis transfersalnya secara matematik dengan mempertimbangkan geometri, massa dan gaya aerodinamika.

Penelitian ini menyajikan model matematika gerak lembing setelah dilempar menggunakan persamaan *Nonlinear Three Degrees of Freedom (3 DOF)*. Model gerak lembing yang disajikan mengkaji geometri, massa dan gaya aerodinamika.

Gaya aerodinamika yang bekerja pada lembing memainkan peran utama dalam mempengaruhi cara lembing bergerak di udara[4]. Beberapa penelitian tentang perhitungan dan analisa karakteristik aerodinamika sebelumnya telah banyak dilakukan.

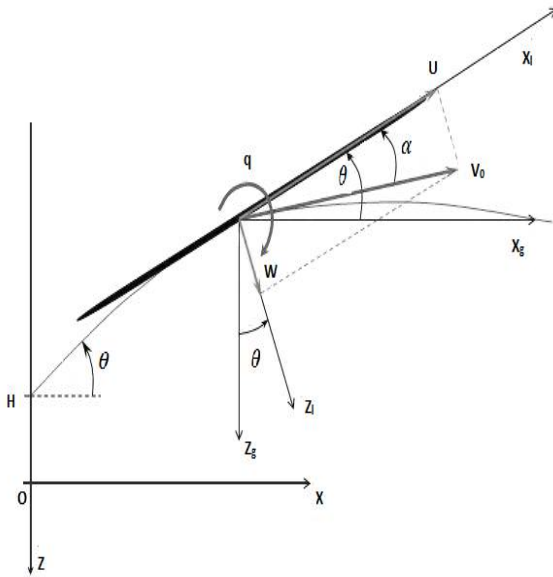
Penelitian [4] melakukan penelitian terkait karakteristik aerodinamika lembing secara eksperimental. Penelitian secara eksperimental selain memerlukan waktu yang lama juga biaya yang cukup tinggi. Penelitian[5] mengkaji perhitungan dan analisa karakteristik aerodinamika pada pelat datar dan daerah *endwall* dengan menggunakan CFD. *Software* CFD memiliki ketelitian yang cukup tinggi dalam perhitungan dan analisa karakteristik aerodinamika. Kelemahan CFD adalah waktu yang diperlukan dalam proses perhitungan karakteristik aerodinamika juga cukup lama, meskipun dibandingkan penelitian secara eksperimental relatif singkat. Pada penelitian [6], *Software* Digital Datcom digunakan untuk menghitung dan menganalisa karakteristik aerodinamika roket RX 250 LAPAN. Ketelitian Digital Datcom lebih rendah daripada CFD tetapi proses perhitungan dapat dilakukan dengan cepat dan mudah dengan hasil yang cukup akurat. Digital Datcom secara khusus dibuat untuk USAF (United States Air Force) menggunakan metode analitik, empiris dan hasil-hasil eksperimen[6]. Karakteristik aerodinamika lembing pada penelitian ini dihitung menggunakan perangkat lunak Digital Datcom dengan memasukkan geometri umum lembing.

Simulasi numerik persamaan gerak lembing yang telah diformulasikan dilakukan dengan variasi sudut awal, kecepatan awal lemparan. Dari hasil simulasi diperoleh sudut awal dan kecepatan awal lemparan yang optimal.

METODE

Sistem Koordinat Lembing Terhadap Kerangka Acuan dan Hubungan Kinematika

Mengikuti [2], sistem koordinat lembing terhadap kerangka acuan bumi digambarkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Sistem Koordinat Lembing terhadap Kerangka Acuan Bumi [2]

- OXZ : kerangka acuan bumi
- CX_gZ_g : kerangka acuan yang berpusat di titik pusat massa lemping, paralel dengan kerangka acuan bumi
- CX₁Z₁ : sistem koordinat lemping
- V₀ : kecepatan awal lemparan
- U,W : unsur unsur kecepatan pada sistem koordinat lemping
- θ : sudut antara CX_g dan CX₁
- α : sudut serang
- q : kecepatan angular lemping
- m : massa lemping

Dari Gambar 1, hubungan kinematika antara sistem koordinat lemping dengan kerangka acuan:

- Kecepatan linier lemping

$$V_0^2 = U^2 + W^2 \quad (1)$$

$$V_x = \dot{x} = V_0 \cos(\theta - \alpha) \quad (2)$$

$$V_z = \dot{z} = -V_0 \sin(\theta - \alpha) \quad (3)$$

- Sudut serang

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = -q \quad (5)$$

Persamaan Gerak Lembing di Udara Setelah Dilempar

Gerak lemping setelah dilempar lebih mendekati gerak dua dimensi. Sehingga, pada penelitian ini digunakan persamaan *Nonlinear Three Degree of Freedom* (3 DOF). Persamaan 3DOF terdiri atas dua persamaan gerak translasi dan satu persamaan gerak rotasi [6]. Masing-masing persamaan merupakan persamaan diferensial orde satu.

Berdasarkan hukum Newton II, gaya total dan momen gaya total yang bekerja pada lemping dalam Persamaan 6 adalah:

$$\sum \Delta F = \frac{d(mV)}{dt} = m\left(\frac{dV_i}{dt} + \omega_i \times V_i\right)$$

$$\sum \Delta M = I\dot{\omega}_i + \omega_i \times (I\omega_i) + \dot{I}\omega_i \quad (6)$$

Persamaan 6 diuraikan menjadi:

$$\sum F_x = m\left(\frac{dU}{dt} + Wq - Vr\right)$$

$$\sum F_y = m\left(\frac{dV}{dt} + Ur - Wp\right)$$

$$\sum F_z = m\left(\frac{dW}{dt} + Vp - Uq\right) \quad (7)$$

$$L = I_{xx} \frac{dp}{dt} + p \frac{dI_{xx}}{dt} + qr(I_{zz} - I_{yy})$$

$$M = I_{yy} \frac{dq}{dt} + q \frac{dI_{yy}}{dt} + pr(I_{xx} - I_{zz})$$

$$N = I_{zz} \frac{dr}{dt} + r \frac{dI_{zz}}{dt} + pq(I_{yy} - I_{xx}) \quad (8)$$

Gaya yang bekerja pada lemping adalah gaya gravitasi bumi (F_g) dan gaya aerodinamika (F_a). Persamaan gerak lemping untuk kasus dua dimensi dengan trayektori pada bidang XZ diperoleh dengan memasukkan harga $V = p = r = 0$ pada Persamaan 7, sehingga diperoleh:

$$F_{gx} + F_{ax} = m\left(\frac{dU}{dt} + Wq\right)$$

$$F_{gz} + F_{az} = m\left(\frac{dW}{dt} - Uq\right) \quad (9)$$

Persamaan 9 merupakan persamaan gerak translasi. Persamaan 8 pada kasus dua dimensi menjadi;

$$M = I_{yy} \frac{dq}{dt} \quad (10)$$

Persamaan 10 merupakan persamaan gerak rotasi yang diperoleh dengan memasukkan harga $V = p = r = 0$ dan nilai $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \text{konstan}$. Persamaan 9 dan 10 merupakan persamaan 3 DOF.

Mengikuti persamaan gaya gravitasi bumi, gaya aerodinamika, dan momen gaya aerodinamika, Persamaan 9 dan 10 menjadi:

$$mg \sin \theta + \frac{1}{2} \rho d V^2 C_x = m \left(\frac{dU}{dt} + Wq \right)$$

$$mg \cos \theta + \frac{1}{2} \rho d V^2 C_z = m \left(\frac{dW}{dt} - Uq \right)$$

$$\frac{1}{2} \rho S V^2 c C_m = I_{yy} \frac{dq}{dt} \quad (11)$$

dengan,

m : massa lembing = 600 g

g : percepatan gravitasi

$$= g_0 \left(1 + \frac{H}{R_{bumi}} \right)^{-2}$$

ρ : kerapatan udara

l : panjang lembing

S : luas acuan (penampang lembing)

c : panjang acuan (diameter lembing)

V : kecepatan

C_x, C_z : koefisien aerodinamika

C_m : koefisien momen aerodinamika

I_{yy} : momen inersia

Dari Persamaan 5, 9 dan 10, maka:

$$U = \int \left(\frac{F_{gx} + F_{ax}}{m} - Wq \right) dt + U_0$$

$$W = \int \left(\frac{F_{gz} + F_{az}}{m} + Uq \right) dt + W_0$$

$$\theta = \iint \frac{M}{I_{yy}} d^2 t + \theta_0 \quad (12)$$

Persamaan 2 dan 3 menjadi:

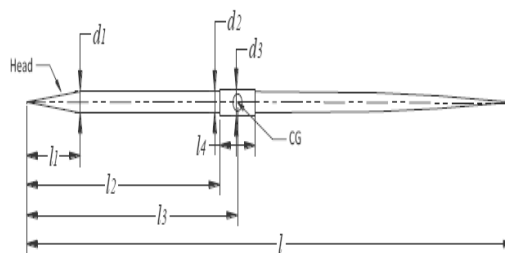
$$x = \int V_0 \cos(\theta - \alpha) dt + x_0$$

$$z = - \int V_0 \sin(\theta - \alpha) dt + z_0 \quad (13)$$

Persamaan 12 dan 13 merupakan solusi numerik persamaan 3DOF dari gerak lembing.

Perhitungan Parameter Aerodinamika Lembing

Perhitungan parameter aerodinamika lembing pada penelitian ini menggunakan perangkat lunak Datcom. Dengan memasukkan geometri lembing pada perangkat lunak Datcom, diperoleh parameter aerodinamika lembing yang digunakan dalam persamaan 3DOF.



Gambar 2. Skema Geometri Lembing [4]

Skema geometri lembing pada Gambar 2 dijelaskan secara rinci pada Tabel 1. Geometri lembing yang digunakan pada penelitian ini adalah geometri lembing untuk wanita.

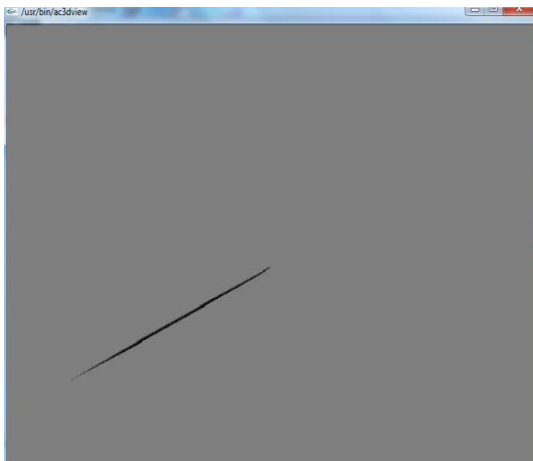
Tabel 1. Geometri lembing untuk wanita[2]

Geometri lembing	(cm)
Panjang total lembing (l)	220
Panjang mata lembing (l_1)	33
Diameter d_1	1,8
Panjang ujung -pusat massa lembing (l_3)	92
Panjang ujung - pegangan lembing (l_2)	85
Panjang pegangan (l_4)	14
Diameter pada pegangan d_3	2,3
Diameter d_2	2,2

Geometri lembing untuk data *input* pada perangkat lunak Datcom ditunjukkan Tabel 2. Model lembing hasil data *input* pada Datcom ditunjukkan Gambar 3.

Tabel 2. Data *input* geometri lembing pada Datcom

X (cm)	Zupper (cm)	Zlower (cm)
0	0	0
5	0,4763	-0,4763
10	0,64539	-0,64539
15	0,75433	-0,75433
20	0,82722	-0,82722
25	0,87315	-0,87315
30	0,89627	-0,89627
33	0,9	-0,9
55	1	-1
75	1,1	-1,1
85	1,1	-1,1
85	1,15	-1,15
99	1,15	-1,15
99	1,1	-1,1
165	1,1	-1,1
170	1	-1
180	0,8	-0,8
200	0,4	-0,4
220	0,1	-0,1
220	0	0



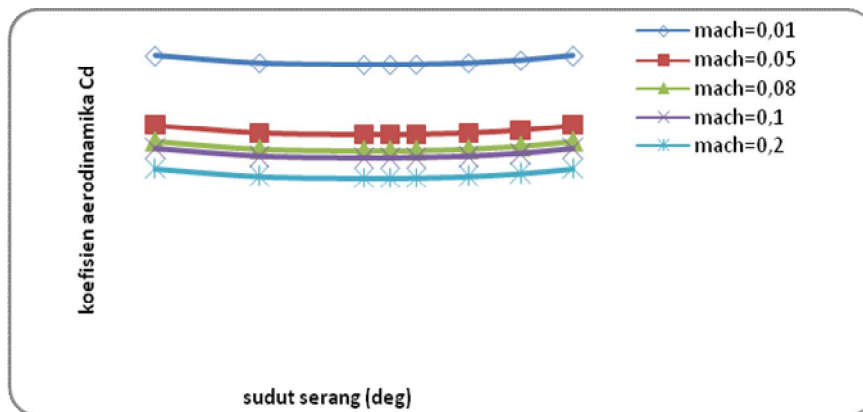
Gambar 3. Model lembing dari ac3dview Datcom

HASIL DAN PEMBAHASAN

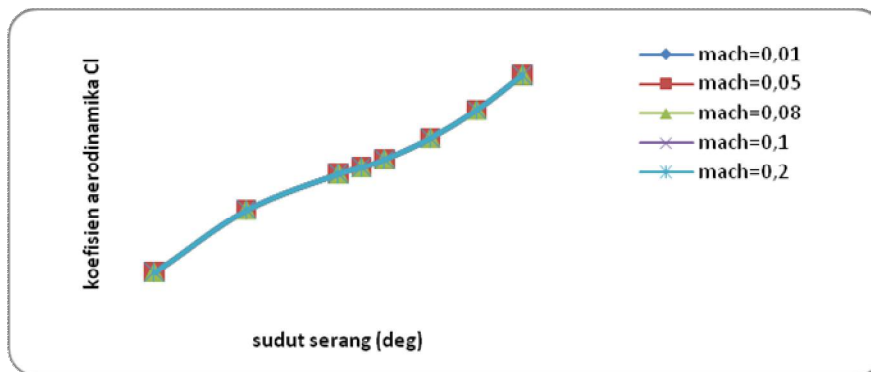
Gambar 4,5, dan 6 merupakan grafik koefisien aerodinamika lembing terhadap sudut serang untuk berbagai bilangan Mach. Koefisien aerodinamika C_D , C_L , C_m diperoleh dari perhitungan Datcom. Nilai C_L pada Gambar 5 dan C_m pada gambar 6 tidak berubah untuk kenaikan bilangan Mach, hal ini disebabkan rentang bilangan Mach yang tidak signifikan. Lembing dalam keadaan stabil statik pada keadaan sudut serang dengan nilai C_m negatif. Pada gambar 6, keadaan stabil statik pada rentang $-8^\circ < \alpha < 0^\circ$.

Gambar 7 mempresentasikan hasil simulasi pada $\theta=35$ deg dengan variasi kecepatan awal lemparan. Untuk $V_0=20$ m/s diperoleh tinggi maksimum (H) = 8,505 m, jangkauan maksimum (x) = 41,579 m dengan $t = 2,575$ s. Untuk $V_0=25$ m/s, $H = 12,433$ m, $x = 61,962$ m, $t = 3,092$ s. Untuk $V_0=30$ m/s diperoleh $H= 16,891$ m, $x= 89,635$ m, $t = 3,759$ s. Untuk $V_0=35$ m/s, diperoleh $H= 22,342$ m, $x=119,451$ m, $t= 4,337$ s. Untuk $V_0= 40$ m/s, $H = 28,62$ m, $x = 157,476$ m, $t = 5,019$ s.

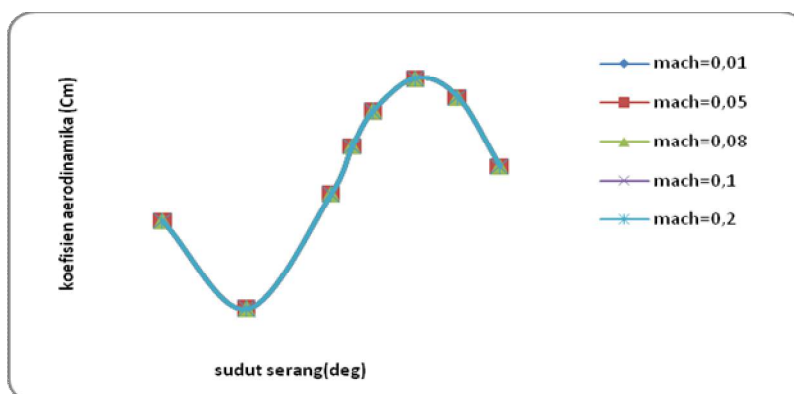
Gambar 8 mempresentasikan hasil simulasi pada $V_0 = 25$ m/s dengan variasi sudut awal lemparan. Untuk $\theta_0=20$ deg diperoleh $H = 5,459$ m, $x = 45,661$ m dengan $t = 1,97$ s. Untuk $\theta_0=25$ deg, $H = 7,463$ m, $x = 52,7$ m, $t = 2,373$ s. Untuk $\theta_0=30$ deg, $H = 9,73$ m, $x = 58,418$ m, $t = 2,581$ s. Untuk $\theta_0=35$ deg, $H = 12,243$ m, $x = 62,554$ m, $t = 3,192$ s. Untuk $\theta_0= 40$ deg diperoleh $H = 14,928$ m, $x= 64,944$ m pada $t = 3,405$ s.



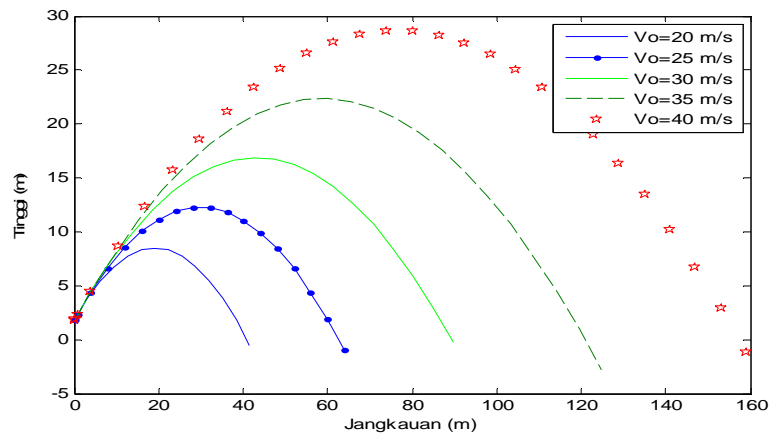
Gambar 4. Grafik koefisien aerodinamika(C_D) lembing terhadap sudut serang untuk berbagai bilangan *Mach*



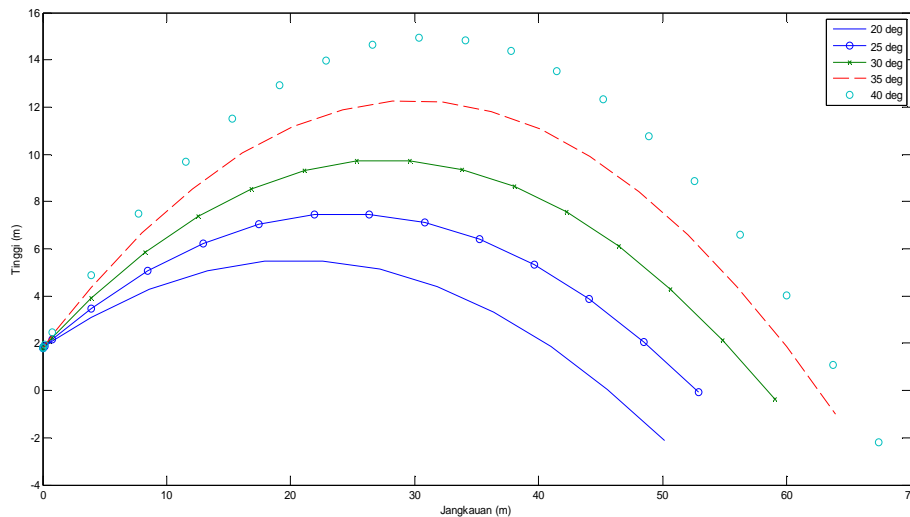
Gambar 5. Grafik koefisien aerodinamika(C_L) lembing terhadap sudut serang untuk berbagai bilangan *Mach*



Gambar 6. Grafik koefisien aerodinamika(C_m) lembing terhadap sudut serang untuk berbagai bilangan *Mach*



Gambar 7. Hasil simulasi gerak lempar lembing pada $\theta_0=35$ deg dengan variasi kecepatan awal lemparan



Gambar 8. Hasil simulasi gerak lempar lembing pada $V_0=25$ m/s dengan variasi sudut lemparan (θ)

SIMPULAN

Hasil simulasi numerik gerak lempar lembing menunjukkan tinggi maksimum H sebesar 28,62 m dan jangkauan maksimum x sebesar 157, 476 mdiperolehpada kecepatan awal $V_0=40$ m/s dan sudut $\theta_0= 35$ deg.

Praktek di lapangan, kecepatan awal lemparan yang digunakan para pelempar lembing tidak lebih dari (30-35) m/s. Model gerak yang disajikan dapat membantu pelempar mengoptimalkan jarak maksimum lemparan khususnya dalam pemilihan sudut awal lemparan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] A.S.B. Suwadj, “Analisis Gerak Lempar Lembing”, *E-Journal Kesehatan dan Olahraga Universitas Negeri Surabaya*, vol. 2, no. 1, pp. 93-105, 2014.
- [2] J. Maryniak, and L. Kozdras, “Mathematical Modeling and Numerical Simulation of javelin Throw”, *Human Movement*, vol. 10 no.1, pp. 16-20, 2009.
- [3] L. Hatton, “Optimising The Javelin Throw in The Presence of Prevailing Winds”, *Faculty of Computing, Information*

Systems and Mathematics,
University of Kingston, 2007,
Website:http://www.leshatton.org/javelin_2005.html
diakses 27 Januari 2011.

- [4] H. Chowdhury, F. Alam, A. Muscara, and I. Mustary, "An Experimental Study of New Rule Javelins", *6thAsia-Pacific Congress on Sports Technology*, pp. 485-490, 2013.
- [5] G. Nugroho, and F. Imaduddin, "Penentuan Karakteristik Aerodinamika Aliran Melalui Airfoil Joukowski/ Pelat Datar pada Daerah Endwall", *Jurnal Teknologi dan Kejuruan*, vol.31, no.1, pp. 39-49, 2008.
- [6] S.S. Wibowo, "Perhitungan Karakteristik Aerodinamika dan Analisis Dinamika dan Kestabilan Gerak Dua Dimensi Pada Modus Longitudinal Roket RX 250 LAPAN", *Tugas Akhir Departemen Teknik Penerbangan, ITB, Bandung*, 2002.