Jurnal Ilmiah KURSOR
Menuju Solusi Teknologi Informasi
Vol. 4, No.1, Januari 2008

ISSN 0216 - 0544

PEMANFAATAN ADAPTIF BARRIER TERM PADA METODE INTERIOR-POINT UNTUK PENYELESAIAN PERMASALAHAN OPTIMASI NONLINIER

Victor Hariadi
Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya Gedung Teknik Informatika, Kampus ITS, Jl. Raya ITS, Sukolilo, Surabaya – 60111
email : victor@its-sby.edu

Abstrak

Saat ini semakin banyak permasalahan pada kehidupan sehari-hari yang memerlukan pendekatan optimasi dalam penyelesaiannya. Pendekatan optimasi sendiri menyediakan banyak alternatif metode yang dapat dipilih sesuai dengan karakteristik permasalahan yang akan diselesaikan. Penyelesaian permasalahan riil menggunakan pendekatan optimasi akan melibatkan model matematis. Model yang dibuat/digunakan akan menentukan pada koridor teknik optimasi mana kita akan bekerja. Secara garis besar, permasalahan dalam teknik optimasi dapat berupa permasalahan (pemrograman) linier atau nonlinier. Sebenarnya kedua kelompok permasalahan ini masih memberikan ruang cukup luas bagi kegiatan riset yang bertujuan untuk merancang konsep atau metode penyelesaian yang lebih efisien. Namun pemrograman nonlinier menyisakan area yang lebih luas, mengingat model-model nonlinier seringkali memiliki bentuk yang lebih kompleks dan dinamis. Klas-klas pemrograman nonlinier dapat ditentukan dari bentuk fungsi tujuan/obyektif, dari karakteristik fungsi tujuan/obyektif, atau dari keberadaan dan bentuk fungsi-fungsi pembatasnya. Salah satu subklas dalam permasalahan pemrograman nonlinier adalah masalah pemrograman kuadratik dengan fungsi obyektif.yang berbentuk fungsi konveks. Dalam kesempatan penelitian ini dirancang sebuah algoritma penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik dengan memanfaatkan metode interior-point dengan dipadukan penggunaan fungsi adaptive barrier yang bertujuan untuk membatasi pergerakan nilai optimal yang dihasilkan pada setiap iterasinya. Sedangkan metode interior-point sendiri memberikan jaminan bahwa nilai-nilai optimal yang dihasilkan akan selalu berasal dari daerah layak.

Kata kunci: teknik optimasi, pemrograman nonlinier, pemrograman kuadratik, metode interior-point, fungsi adaptive barrier.

1. Pendahuluan

Permasalahan numerik terdiri dari permasalahan linier dan non linier. Pada permasalahan linier semua variabel pembentuk fungsi obyektifnya berbentuk linier, sedangkan pada permasalahan nonlinier variabel pembentuk fungsi obyektifnya berbentuk nonlinier.

Salah satu bentuk permasalahan optimasi nonlinier adalah permasalahan pemrograman kuadratik. Dan kami akan menggunakan permasalahan pemrograman kuadratik ini sebagai studi kasus penelitian ini. Ada dua jenis permasalahan pemrograman kuadratik, yaitu dengan pembatas *(constrained*) dan tanpa pembatas (*unconstrained).* Untuk menyederhanakan permasalahan, maka akan kita gunakan slack variables, agar bentuk-bentuk pertidaksamaan dapat dipandang sebagai bentuk persamaan. Selain itu digunakan permasalahan pemrograman kuadratik yang mempunyai matriks Hessian semi definit positif, sehingga permasalahan memiliki berbentuk fungsi konveks (sehingga dapat mempunyai solusi yang unik).

2. Tinjauan Terhadap Permasalahan Pemrograman Kuadratik

Pemrograman kuadratik yang digunakan adalah pemrograman kuadratik dengan fungsi obyektif berbentuk nonlinier, dimana di dalamnya terdapat bentuk-bentuk suku kuadratik dan fungsi pembatas berbentuk linier.

Selain itu digunakan pula akan dimanfaatkan dua bentuk dasar pemrograman kuadratik, yaitu bentuk primal dan dual. Bentuk dual merupakan representasi permasalahan jika ditinjau dari "sudut pandang kolom". Dan sebuah himpunan solusi dikatakan optimal apabila himpunan tersebut dapat berlaku pada permasalahan bentuk primal dan permasalahan bentuk dual.

2.1. Bentuk dasar pemrograman kuadratik

Bentuk dasar pemrograman kuadratik bentuk primal dan dual adalah :

- **Bentuk Primal :**

  Minimasi f(x) = ½ xTQx + cTx

  Subject to g(x) = Ax – b (2.1)

- **Bentuk Dual:**

  Maksimasi f(x) = - ½ xTQx + bTy

  Subject to g(x) = c + Qx - ATy – z (2.2)

2.2. Konveksitas fungsi obyektif

Uji konveksitas dilakukan untuk memastikan bahwa permasalahan kita memiliki satu himpunan solusi yang unik. Selain pengujian analitis melalui fungsi obyektifnya, uji konveksitas ini dapat memanfaatkan matriks Q. Suatu fungsi obyektif (dalam hal ini adalah fungsi kuadratik) merupakan fungsi konveks jika matrik Q semidefinit positif. Pengujian matriks Q dapat dilakukan dengan 2 cara : 1. xTQx > 0

2. nilai eigen(Q) >= 0 , nilai eigen dapat diperoleh dari perhitungan det(λI - Q) = 0 Contoh :

det(λI-Q) = 0

det(λ[1 0;01] – [2 1;1 2]) = 0

λ2 – 4x + 3 = 0

λ1 = 3, λ2= 1 (λ ≥ 0)

Maka matriks Q adalah semidefinit positif.

2.3. Kondisi optimal

Kodisi optimal dari penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik akan tercapai apabila memenuhi kondisi Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Kondisi KKT merupakan generalisasi dari metode *Lagrange multiplier* yang diaplikasikan untuk bentuk primal permasalahan pemrograman kuadratik:

L(x, μ) = cTx + ½ xTQx - μ(Ax – b) (2.3)

Hanya saja penerapan KKT, yang identik dengan penerapan Lagrange multiplier ini, selain berfungsi untuk menjamin diperolehnya solusi yang optimal, dalam prosesnya juga me-linier-isasi bentuk nonlinier (kuadratik) dari fungsi obyektif menjadi bentuk linier serta membuat pertidaksamaan dalam fungsi pembatas menjadi bentuk persamaan. Hal ini dilakukan dengan tujuan untuk mempermudah proses komputasi dan penyelesaian secara umum permasalahan pemrograman kuadratik itu sendiri.

Formulasi umum Lagrange multiplier yang ditulis dengan mengkaitkan variabel dual, seperti berikut:

L(x, λ)= c Tx + ½ xT Qx - yT(Ax-b) (2.4)

dimana y merupakan variabel dual dari persamaan primal pemrograman kuadratik.

Dikatakan bahwa sebuah sistem permasalahan nonlinier (khususnya permasalahan pemrograman kuadratik) akan memiliki solusi optimal, yaitu apabila memenuhi kondisi KKT. Kondisi KKT merupakan turunan pertama dari persamaan umum Lagrange (2.4).

∂*L*/∂x ≥ 0

$c + Qx - \mu A \geq 0$

atau jika ditambahkan variabel surplus akan menjadi

$\mathbf{c + Qx - \mu A - z = 0}$

$x\,[\partial L/\partial x] = 0$

$x\,(c + Qx - \mu AT) = 0$

$\partial L/\partial \mu \leq 0$

$\mathbf{Ax - b = 0}$

$\mu\,[\partial L/\partial \mu] = 0$

$\mu\,(Ax - b) = 0$

$x \geq 0$

$\mu \geq 0$

Dari 2 persamaan awal, untuk menyederhanakannya dengan memberikan nilai $x = 0$ atau $z = 0$. Sehingga kondisi KKT terpenuhi jika $xTz = 0$. Dari persamaan 3 dan 4, digunakan pertimbangan $Ax - b = 0$, jika $\mu = 0$ maka persamaan yang digunakan adalah $Ax - b + v = 0$. Jadi persamaan kondisi KKT yang digunakan adalah:

$c + xQ - \mu AT + z = 0$

$Ax - b = 0$

$xTz = 0 \qquad (2.5)$

Selanjutnya variabel μ akan diganti dengan variabel dual y (karena Lagrange multipler berkesesuaian dengan variabel dual y). Sehingga persamaan kondisi KKT yang digunakan menjadi :

$c + Qx - ATy + z = 0$

$Ax - b = 0$

$xz = 0\ (x,z) \geq 0\ (2.6)$

Contoh : Dari contoh persamaan fungsi obyektif dan pembatas primal-dual di atas, setelah ditambahkan variabel slack, maka diperoleh :

$$A = \begin{vmatrix} 5/12 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{array}{c|ccccc|} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$c = \begin{vmatrix} -30 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 35/12 \\ 35/2 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$x = [2/5\ 0.0001\ 2.7501\ 16.4999\ 5.4\ 4.9999]'$

$y = [-256/25\ -10\ -1/15\ -746/25]'$

$z = [0.0001\ 0.0002\ 256/25\ 10\ 1/15\ 746/25]'$

sehingga kita dapat membuktikan bahwa :

$c + xTQ - yA + z = 0$

$Ax - b = 0$

$xTz = 0$

$x \geq 0,\ z \geq 0$

Sehingga persamaan di atas memenuhi kondisi KKT.

3. Aplikasi Metode Interior-Point Dengan Fungsi Adaptif Barrier

Pada bagian ini akan dibahas persamaan-persamaan yang digunakan pada perhitungan pencarian nilai optimal dari permasalahan pemrograman kuadratik.

3.1. Fungsi Adaptif Barrier

Fungsi barrier digunakan untuk membatasi pergerakan fungsi obyektif agar tidak keluar dari daerah kelayakan.

Bentuk umum fungsi barrier adalah:

$\beta(x,y,\mu)$ = lagrange function + barrier term

$= cTx + 1/2xTQx - \mu\ \Sigma \log x - yT(Ax - b)$ (3.1)

Bentuk persamaan fungsi barrier klasik adalah:

$\beta(x,y,\mu)$ = fungsi lagrange + barrier term

$= cTx + 1/2xTQx - \mu\ \Sigma \log x - yT(Ax - b)$ (3.2)

dengan μ adalah parameter barrier.

Pada metode barrier klasik, fungsi barrier diminimasi melalui penurunan μ konvergen menuju 0. Bentuk persamaan fungsi adaptif barrier adalah :

$\beta(x,y,\mu)$ = fungsi lagrange + barrier term

$= cTx + 1/2xTQx - \mu\ \Sigma\ xn \log x - yT(Ax - b)$ (3.3)

Jika salah satu pembatas Σ aijxj = bi mempunyai semua koefisien aij positif, maka Σ xni = 1. Metode adaptive barrier dijalankan dengan menggunakan iterasi selanjutnya untuk meminimumkan $\beta(x,y,\mu)$ dengan pembatas $Ax = b$. Karena f(x) konveks dan - $\mu\ \Sigma$ xn log x strictly convex, maka nilai minimum terdefinisikan dengan unik dan $x > 0$. Pada metode adaptive barrier nilai parameter barrier μ tetap konstan, perubahan fungsi barrier dilakukan dengan konvergensi variabel penalti.

Untuk perhitungan selanjutnya variabel penalti xn dilambangkan dengan pe. Sehingga persamaan fungsi adaptive barrier menjadi :

$\beta(x,y,\mu) = cTx + 1/2xTQx - \mu\ \Sigma\ pe \log x - yT(Ax - b)$ (3.4)

Turunan pertama dari persamaan di atas:

$\partial\beta/\partial x = c + Qx - \mu\ pe\ x\text{-}1\ e - ATy$

$\partial\beta/\partial y = b - Ax$

Pemadanan dengan kondisi KKT, maka diperoleh :

$c + Qx - \mu\ pe\ x\text{-}1\ e - ATy = 0$

$Ax - b = 0$

$xz = 0$ (karena μ pe x-1 = z, maka xz = μ pe) (3.5)

3.2. Metode interior point

Langkah-langkah dalam aplikasi metode Interior-Point :

- **Penentuan move direction**

Setiap variabel yang digunakan pada persamaan fungsi barrier ditambah dengan move direction (Δ), sehingga menjadi :

$(x + \Delta x)$, $(y + \Delta y)$,dan $(z + \Delta z)$

Hasil penurunan fungsi barriernya menjadi :

$\Delta x = (Z+XQ)$ -1 $(XAT\ \Delta y+(\mu epe-XZe))$

$\Delta y = -(A(Z+XQ)$ -1 $A(Z+XQ)$ -1 $(\mu epe-XZe)$

$\Delta z = Q\ \Delta x - AT\ \Delta y$ (3.6)

- **Penentuan steplength multiplier**

Steplength multiplier diperlukan untuk menjaga agar nilai (x,z) tetap positif, karena merupakan variabel slack.

Steplength multiplier ditentukan dengan menggunakan persamaan :

$\alpha x = \beta[\max\{1,- \Delta x/x\}]$ -1

$\alpha z = \beta[\max\{1,- \Delta z/z\}]$ -1 (3.7)

Rentang nilai β antara 0 dan 1; $\alpha x = \alpha y = \alpha z = \alpha = \min(\alpha x, \alpha z)$.

- **Update variabel x, y, dan z**

Variabel x, y, dan z yang digunakan pada perhitungan selanjutnya adalah :

$x = x + \Delta\alpha x$

$y = y + \Delta\alpha y$

$z = y + \Delta\alpha z$ (3.8)

3.3. Penentuan nilai optimal

1. Menghitung nilai fungsi obyektif primal (ZP) dan dual (ZD) yang baru:

$ZP = cTx + ½\ xTQx$

$ZD = bTy - ½\ xTQx$ (3.9)

2. Menghitung gap

gap = (ZP – ZD) / n (dihitung di awal iterasi)

gap_1i = (ZP i-1 – ZD i-1)

gap_2i = (ZP i – ZD i) (3.10)

Jika |gap1 – gap_2 | < gap, maka menghitung nilai pe yang baru & iterasi dilanjutkan. Perhitungan nilai pe yang baru dilakukan dengan tiga cara

- pe = 0.005*pe
- pe = (x1 * z) / (μ * n)
- pe = [(x1 * z) / (μ * n)] * 0.005.

selain itu untuk membatasi waktu komputasi, maka ditetapkan jumlah_iterasi = 200 atau gap <= 10-6 (mana yang terlebih dahulu tercapai).

4. Contoh Hasil dan Analisis Perhitungan Numeris

Dengan menggunakan contoh kasus di atas, maka diperoleh :

A = [5/12 -1 1 0 0 0;5/2 1 0 1 0 0;-1 0 0 0 1 0;0 1 0 0 0 1]

Q = [2 1 0 0 0 0 ;1 2 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0]

c = [-30 -30 0 0 0 0]'

b = [35/12 35/2 5 5]'

x = [2/5 0.0001 2.7501 16.4999 5.4 4.9999]'

y = [-256/25 -10 -1/15 -746/25]'

z = [0.0001 0.0002 256/25 10 1/15 746/25]'

pe = [0.2 0.2 0.1 0.1 0.2 0.2]

Hasil iterasi terakhir untuk setiap faktor pengali pe :

Tabel 4.1 Iterasi terakhir untuk setiap faktor pengali pe

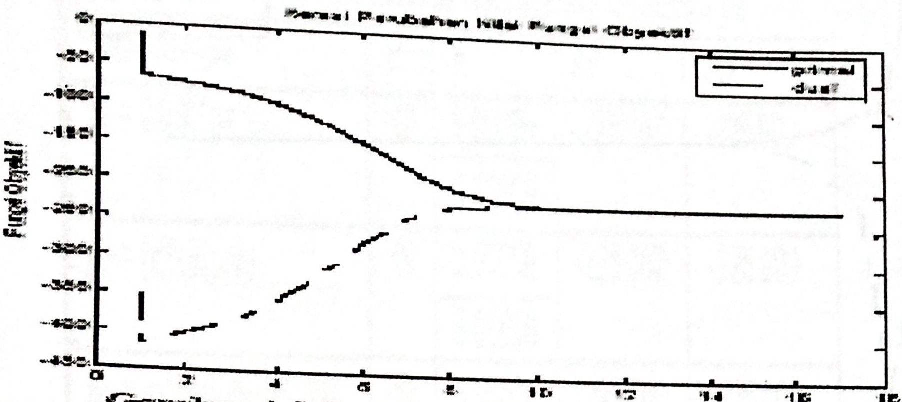
Faktor pengali pe	It	X	ZP	ZD
pe = 0.0005 * pe	17	5.000000 5.000000	-225.000	-225.000
pe = 0.005 * pe	12	5.000000 5.000000	-225.000	-225.000
pe = 0.05 * pe	13	5.000000 5.000000	-225.000	-225.000
pe = 0.5 * pe	31	5.000000 5.000000	-225.000	-225.000
pe = 0.9 * pe	187	5.000000 5.000000	-225.000	-225.000

Dari rangkaian uji coba 1 diperoleh gambaran bahwa kelima variabel penalti pe yang menggunakan [faktor_pengali] dapat menyelesakan ketiga jenis soal dengan baik. Dimana nilai optimal yang dihasilkan adalah sama. Namun perbedaannya adalah dari jumlah iterasi. Iterasi minimal dihasilkan oleh [faktor_pengali] 0.05 atau 0.005.

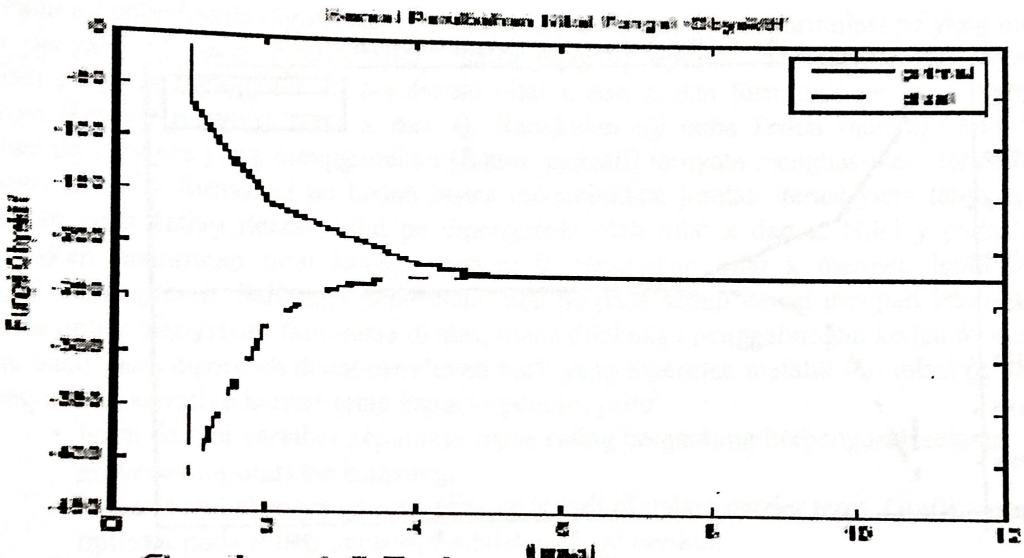
Dari uji coba pertama ini dapat disimpulkan bahwa nilai [faktor_pengali] yang semakin besar akan menyebabkan jumlah iterasi semakin banyak. Hal ini dikarenakan [faktor_pengali] yang besar akan menyebabkan pengurangan variabel penalti pe yang lebih lambat pada setiap iterasinya. Sehingga barrier term akan lebih lama menuju ke nol.

Sedangkan [faktor_pengali] yang semakin kecil menunjukkan sifat yang tidak stabil. Pada soal gan jumlah variabel y banyak, ada kecenderungan jumlah iterasi semakin banyak. Sementara pada soal sederhana atau soal dengan jumlah variabel x yang banyak, jumlah iterasi lebih stabil. Hal ini disebabkan nilai [faktor_pengali] yang kecil akan menghasilkan nilai pe yang kecil (di setiap iterasinya). Akibatnya nilai steplength tidak terkurangi secara signifikan. Sehingga 'lompatan' nilai x, y, dan z akan sangat besar atau fluktuatif. Dan dampaknya adalah diperlukan banyak iterasi untuk memperoleh nilai optimal.

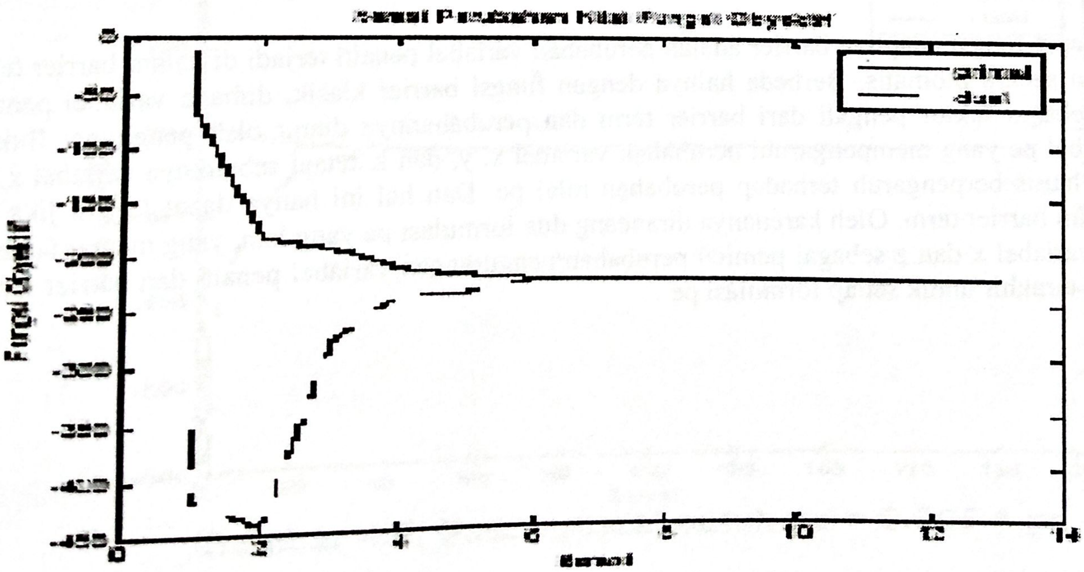
Grafik perjalanan nilai optimal pada setiap iterasi adalah sebagai berikut :



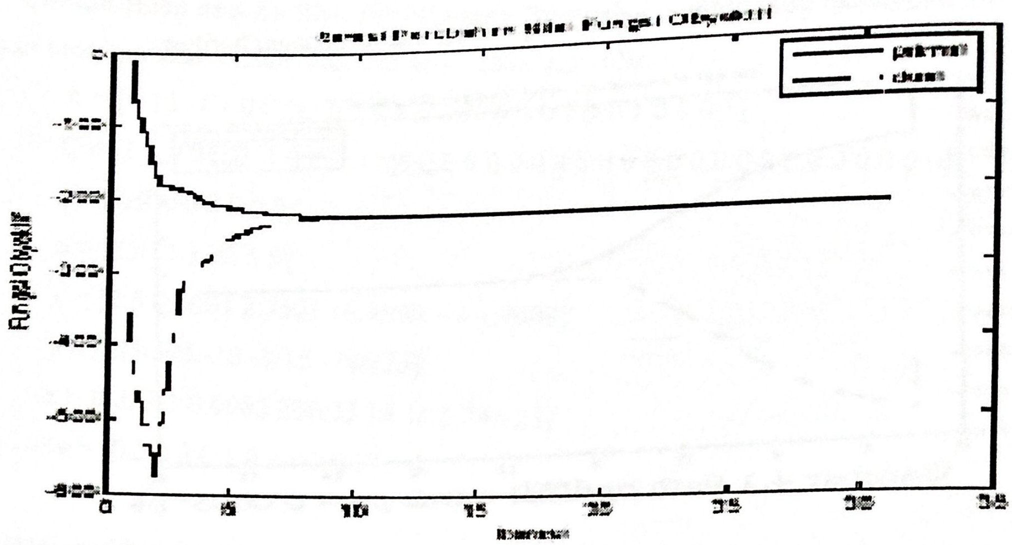
Gambar 4.1 Path optimal untuk pe = 0.0005*pe



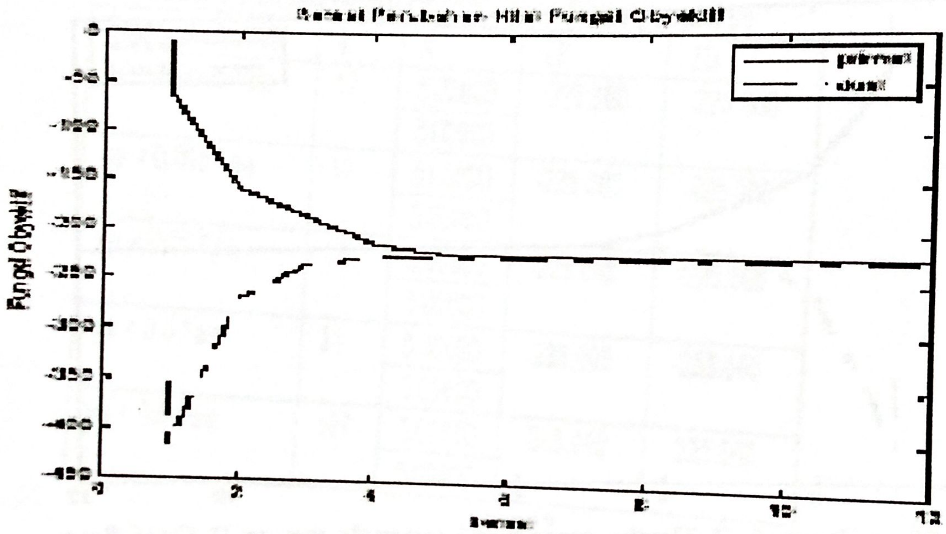
Gambar 4.2 Path optimal untuk pe = 0.005*pe



Gambar 4.3 Path optimal untuk pe = 0.05*pe



Gambar 4.4 Path optimal untuk pe = 0.5*pe



Gambar 4.5 Path optimal untuk pe = 0.9*pe

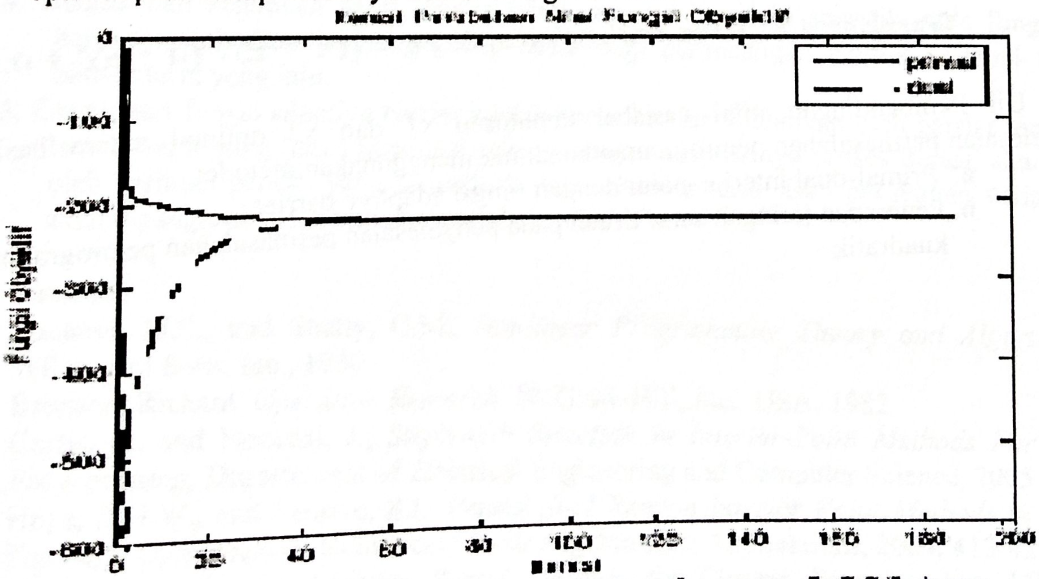
Konsepsi fungsi adaptive barrier adalah perubahan variabel penalti terjadi di dalam barrier term dan berjalan secara otomatis. Berbeda halnya dengan fungsi barrier klasik, dimana variabel penalti berfungsi sebagai faktor pengali dari barrier term dan perubahannya diatur oleh pengguna. Bukan hanya variabel pe yang mempengaruhi perubahan variabel x, y, dan z. tetapi sebaliknya variabel x, y, dan z juga harus berpengaruh terhadap perubahan nilai pe. Dan hal ini hanya dapat terjadi jika pe terletak dalam barrier term. Oleh karenanya dirancang dua formulasi pe yang lain, yang memanfaatkan perubahan variabel x dan z sebagai pemicu perubahan/pengurangan variabel penalti dan barrier term. Hasil iterasi terakhir untuk setiap formulasi pe :

Tabel 4.2. Iterasi terakhir untuk setiap formulasi pe

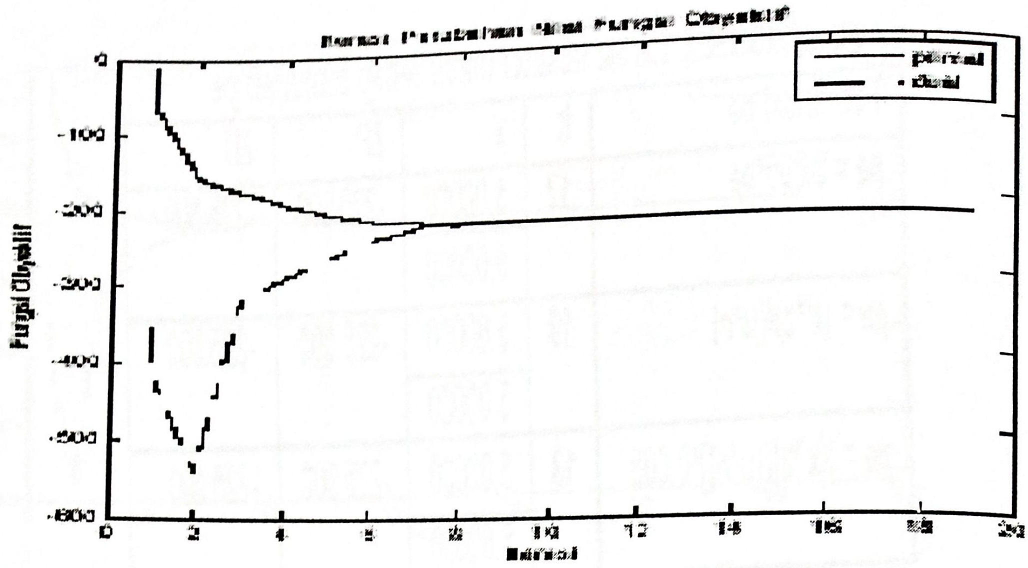
Formulasi pe	It	x	ZP	ZD
pe = 0.005*pe	12	5.00000	-225.000	-225.000
		5.00000		
pe = $(x^T z)/(\mu * n)$	19	5.00000	-225.000	-225.000
		5.00000		
pe = $[(x^T z)/(\mu * n)]*0.005$	13	5.00000	-225.000	-225.000
		5.00000		

Pada uji coba kedua digunakan 3 formulasi pe sekaligus. Yaitu formulasi pe yang menggunakan [faktor_pengali] (dimana dipilih nilai [faktor_pengali] optimal berdasarkan uji coba pertama), formulasi pe yang menggunakan perubahan nilai x dan z, dan formulasi pe yang menggabungkan keduanya ([faktor_pengali] serta x dan z). Rangkaian uji coba kedua menunjukkan hasil bahwa formulasi pe pertama yang menggunakan [faktor_pengali] ternyata menghasilkan iterasi lebih sedikit. Dan hasil uji coba formulasi pe kedua justru menunjukkan jumlah iterasi yang lebih besar. Hal ini disebabkan pada setiap iterasi, nilai pe dipengaruhi oleh nilai x dan z. Nilai y pada setiap iterasi menunjukkan penurunan nilai hingga menuju 0, sedangkan nilai x menjadi lebih besar hingga mencapai nilai optimal. Sehingga penurunan nilai pe pada setiap iterasi menjadi lebih lambat . Oleh karena itu untuk menyiasati fenomena di atas, maka dilakukan penggabungan kedua formulasi pe. Dan ternyata hasil yang diperoleh dapat mendekati hasil yang diperoleh melalui formulasi pe yang pertama, dan persyaratan adaptive barrier tetap dapat terpenuhi, yaitu:

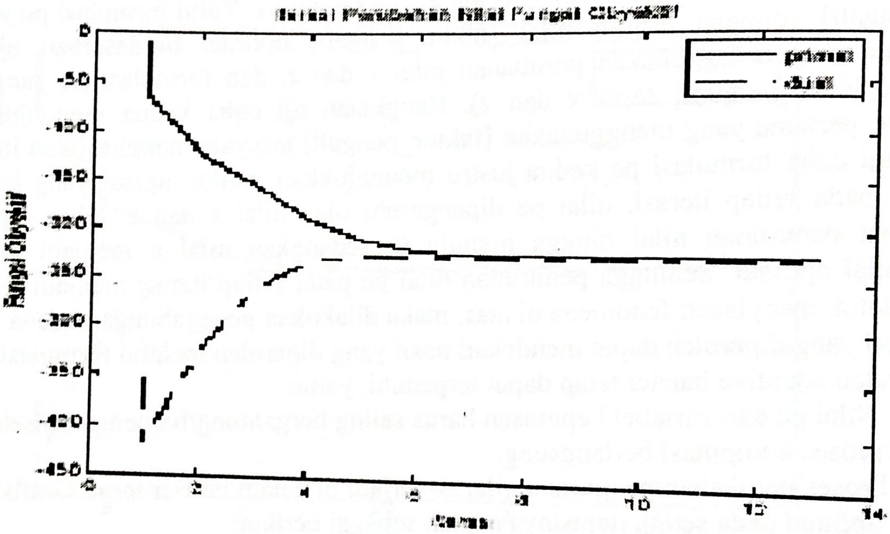
- Nilai pe dan variabel keputusan harus saling bergantung/berpengaruh selama proses komputasi berlangsung;
- Proses perubahan/pengurana nilai pe terjadi di dalam barrier term. Grafik perjalanan nilai optimal pada setiap iterasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.6. Path optimal untuk pe = 0.005 * pe



Gambar 4.7. Path optimal untuk $pe = (x^T * z) / (\mu * n)$



Gambar 4.8. Path optimal untuk $pe = [(x^T * z) / (\mu * n)] * 0.005$

Uji Pembandingan nilai variabel keputusan x1 dan x2 optimal antara hasil penelitian penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik menggunakan metode:

a. Primal-dual interior-point dengan fungsi adaptive barrier
b. Penerapan jaringan saraf tiruan pada penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik

Tabel 4.3 Perbandingan hasil perhitungan dengan metode JST

x optimal dengan Adaptive Barrier dan Interior-Point	x optimal dengan Penerapan Jaringan Saraf Tiruan
$x_1 = 5.00000$	$x_1 = 5$
$x_2 = 5.00000$	$x_2 = 5$
$x_3 = 5.83333$	$x_3 = 35/6$
$x_4 = 0.00000$	$x_4 = 0$
$x_5 = 10.00000$	$x_5 = 10$
$x_6 = 0.00000$	$x_6 = 0$

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik menggunakan metode primal-dual interior point dengan fungsi adaptive barrier menghasilkan nilai yang sama dengan metode JST, dan memerlukan iterasi yang lebih sedikit/banyak.

5. Kesimpulan

1. Algoritma interior point dengan fungsi adaptif barrier dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman kuadratik, dengan hasil solusi yang sama atau mendekati solusi algoritma lain yang dijadikan pembanding pada penelitian ini.
2. Nilai titik awal (starting point) diberikan secara manual, yang nilainya harus memenuhi batasan dan syarat yang ditentukan (agar solusi optimal dapat diperoleh) memunculkan kesulitan tersendiri dan menjadi kelemahan dari aplikasi ini.
3. Besar kecilnya nilai variabel penalti pada barrier term tidak berpengaruh terhadap hasil optimal dari aplikasi, namun dapat memberikan perbedaan terhadap jumlah iterasi. Jumlah iterasi minimal dapat dicapai melalui penetapan nilai [faktor_pengali] sebesar 0.05 atau 0.005.
4. Bentuk dan ketentuan dasar barrier term yang tidak terlalu spesifik pada fungsi adaptive barrier memberikan peluang cukup besar bagi perancangan bentuk variabel penalti dan barrier term yang lain.
5. Esensi dari fungsi adaptive barrier adalah peran barrier dijalankan oleh barrier term dan nilai barrier term yang harus tereduksi seiring dengan berjalannya proses iterasi, akan dilakukan oleh variabel penalti yang terletak di dalam barrier term. Dan perubahan variabel penalti akan dipengaruhi oleh variabel-variabel x dan z.

Daftar Pustaka:

1. Bazaraa, M.S., and Shetty, C.M., *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, John Willey and Sons, Inc., 1990
2. Bronson, Richard, *Operation Research*, McGraw-Hill, Inc., USA, 1982
3. Curtis, F., and Nocedal, J., *Steplength Selection in Interior-Point Methods For Quadratic Programming*, Departement of Electrical Engineering and Computer Science, 2005
4. Hope, R.H.W., and Petrove, S.I., *Primal-dual Newton Interior Point Methods in Shape and Topology Optimization*, Numerical Linear Algebra with Applications, 2004, 413-429
5. Lange, Kenneth, *An Adaptive Barrier Method for Convex Programming, Methods and Applications of Analysis*, International Press, 1994, pp. 392-402
6. Melman, A., and Polyak, R., *The Newton Modified Barrier Method for Quadratic Programming Problems*, Ann. Oper. Res., vol. 62, pp. 465-519, 1996
7. Meszaros, C., *Steplengths in Interior-Point Algorithms of Quadratic Programming*, Computer and Automation Research Institut, 1997

8. Nash, S.G, and Polyak, R., and Sofer, A., *A Numerical Comparison of Barrier and Modified-Barrier Methods for Large-Scale Bound-Constrained Optimization, Large Scale Optimization,* State of the Art, W.W. Hager, D.W. Hearn and P.M. Pardalos(Eds.), Academic Publishers B.V, 1994, pp. 319-338
9. Nocedal J, Wright S.J., *Numerical Optimization*, Beijing : Science Press, 2006 (first edition in 1999)
10. Polyak, R., *Modified barrier function (theory and method)*, Math Programming, 54 (1992), 177-222
11. Rardin, R.L., *Optimization in Operation Research*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1998
12. Setiyanti, A.A., *Penerapan Jaringan Saraf Tiruan Pada Penyelesaian Permasalahan Pemrograman Kuadratik*, Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, ITS, Surabaya, 2005
13. Taha, H.A, *Operation Research : An Introduction*, 7th Edition, Pearson Education, Inc., 2003
14. Wright, M.H., *Primal- Dual Interior-Point Methods*, SIAM : Philadelphia, 1996